Compléments sur les espaces vectoriels

Table des matières

1 Espaces vectoriels de dimension finie

1.1 Dimension d'un espace vectoriel

Définition 1.1 : *Espace vectoriel de dimension finie*

Soit E un espace vectoriel. E est dit de **dimension finie** s'il possède une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, E est dit de dimension infinie.

Exemple 1. $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *sont de dimension finie.*

Exemple 2. $\mathbb{R}[X]$ *est de dimension infinie.*

Définition 1.2 : *Rappel : base d'un espace vectoriel*

Une famille $(f_1, \dots, f_p)$ est une **base** d'un espace vectoriel E si elle est libre et génératrice.
Autrement dit, pour tout $x \in E$, il existe un unique p-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot f_i.$$

Les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont appelés **coordonnées** de x dans la base $(f_1, \dots, f_p)$.

Théorème 1.3 : *Extraction de base d'une famille génératrice finie*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Si $\mathcal{F}$ est une famille génératrice finie de E, alors on peut extraire de $\mathcal{F}$ une base $\mathcal{B}$ de E.

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence sur le cardinal de la famille $\mathcal{F}$. □

Exemple 3. *Déterminer une base de* $E = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\-1\\7\end{pmatrix}\right)$.

Solution.

Corollaire 1.4 : *Existence d'une base en dimension finie*

Tout espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$ admet une base.

Tout espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$ possède même une infinité de bases.

Théorème 1.5 : *Théorème de la dimension finie*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs.

Démonstration. Admis □

Définition 1.6 : *Dimension*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Le nombre de vecteurs commun à toutes les bases de E est appelé **dimension** de E, notée $\dim(E)$.

Par convention, la dimension de l'espace réduit à $\{0_E\}$ est 0.

Exemple 4. *(Exemples de référence)*

(i) La base canonique de $\mathbb{R}^n$ possède n vecteurs :

$$\dim\left(\mathbb{R}^n\right) = n.$$

(ii) La base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ possède $n\,p$ vecteurs :

$$\dim\left(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})\right) = n\,p.$$

(iii) La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ possède $n+1$ vecteurs :

$$\dim\left(\mathbb{R}_n[X]\right) = n+1.$$

(iv) $\mathbb{R}[X]$ ne possède pas de famille génératrice finie, $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie.

Exemple 5. *Déterminer la dimension de* $E = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\-1\\7\end{pmatrix}\right)$.

Solution.

Définition 1.7 : *Droites, plans, hyperplans*

Soit E un espace vectoriel.

(i) Tout sous-espace vectoriel de E de dimension 1 est appelé **droite vectorielle**.

(ii) Tout sous-espace vectoriel de E de dimension 2 est appelé **plan vectoriel**.

(iii) Si E est de dimension finie, tout sous-espace vectoriel de E de dimension $\dim(E) - 1$ est appelé **hyperplan** de E.

Exemple 6. *Si $E = \mathbb{R}_3[X]$, alors*

(i) $F = \operatorname{Vect}\left(X^2+1\right)$ est une droite vectorielle.

(ii) $G = \operatorname{Vect}\left(X^2+1, 2X-1\right)$ est un plan vectoriel.

(iii) $H = \operatorname{Vect}\left(X^3+1, X^2, X-2\right)$ est un hyperplan de E.

1.2 Familles de vecteurs en dimension finie

1.2.1 Familles libres

Théorème 1.8 : *Théorème de la base incomplète*

Si E est un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_p)$ une famille libre de E, alors $p \leq n$ et il existe des vecteurs $f_{p+1}, \ldots, f_n$ tels que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ soit une base de E.

Démonstration. Admis □

Exemple 7. *Compléter la famille $\mathcal{F} = \left(X^2-1, X^2+1\right)$ pour former une base de $\mathbb{R}_2[X]$.*

Solution.

Proposition 1.9 : *Cardinal d'une famille libre en dimension finie*

Si $\mathcal{L}$ est une famille libre d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors

$$\operatorname{card}(\mathcal{L}) \leq \dim(E).$$

De plus,

$$\operatorname{card}(\mathcal{L}) = \dim(E) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L} \text{ est une base de } E.$$

Démonstration. C'est une conséquence du théorème 1.8 de la base incomplète. □

Exemple 8. *Déterminer si la famille* $\mathcal{F} = (X^2 - 1, X^2 + 1, X - 1, 1)$ *est une famille libre de* $\mathbb{R}_2[X]$.

Solution.

Méthode 1.10 : *Famille libre de cardinal égal à la dimension*

Cette proposition est très importante : en dimension finie, si une famille a le bon nombre de vecteurs, il suffit de prouver qu'elle est libre pour montrer que c'est une base.

Exemple 9. *Montrer que* $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)$ *est une base de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Solution.

Une famille libre de p vecteurs engendre un espace de dimension p. En effet, elle est génératrice de son espace vectoriel engendré par définition, et libre, donc c'est une base de celui-ci.

Exemple 10. *Comme* (X, X^2) *est libre, alors* $\operatorname{Vect}(X, X^2)$ *est un espace vectoriel de dimension* 2.

1.2.2 Familles génératrices

Proposition 1.11 : *Cardinal d'une famille génératrice en dimension finie*

Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors

$$\operatorname{card}(\mathcal{G}) \geq \dim(E).$$

De plus,

$$\operatorname{card}(\mathcal{G}) = \dim(E) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{G} \text{ est une base de } E.$$

Démonstration. On a vu dans le théorème 1.3 qu'il existait une sous-famille de $\mathcal{G}$ qui est une base de E. □

En dimension finie, si une famille a le bon nombre de vecteurs, il suffit de prouver qu'elle est génératrice pour montrer que c'est une base.

En pratique, on utilise cependant très peu cette proposition : en effet, on a la même propriété avec les familles libres, et la liberté d'une famille est beaucoup plus facile à prouver.

1.2.3 Bases

Proposition 1.12 : *Caractérisation d'une base en dimension finie*

Soit $\mathcal{F}$ une famille de cardinal n d'un espace vectoriel E de dimension finie n. Alors :

$$\mathcal{F} \text{ est libre} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F} \text{ est une base de } E \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F} \text{ est génératrice de } E.$$

Démonstration. C'est une application évidente des propositions 1.9 et 1.11. □

1.3 Sous-espaces vectoriels en dimension finie

Proposition 1.13 : *Dimension d'un sous-espace vectoriel*

Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors F est de dimension finie et

$$\dim(F) \leq \dim(E).$$

De plus,

$$\dim(F) = \dim(E) \quad \Leftrightarrow \quad F = E.$$

Démonstration. Toute famille libre de F est également une famille libre de E. Ainsi, si $\mathcal{F}$ est une base de F (composée a fortiori de $\dim(F)$ vecteurs), c'est une famille libre de E et, par la proposition 1.9, elle est composée de moins de $\dim(E)$ vecteurs. D'où

$$\dim(F) \leq \dim(E).$$

De plus, si $\dim(F) = \dim(E)$ alors $\mathcal{F}$ est une base de E par la proposition 1.9. D'où $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = F$. □

Méthode 1.14 : *Egalité d'espaces vectoriels*

En dimension finie, nous utiliserons souvent cette proposition pour montrer que deux espaces vectoriels sont égaux.

Exemple 11. *Montrer que* $E = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ *et* $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}\right)$ *sont égaux.*

Solution.

1.4 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 1.15 : *Rang d'une famille*

Soit $\mathcal{F}$ une famille finie d'un espace vectoriel E. On définit le **rang** de $\mathcal{F}$ par

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{F}))$$

Le rang d'une famille finie $\mathcal{F}$ est la dimension de l'espace vectoriel engendré par cette famille.

Le rang d'une famille $\mathcal{F}$ correspond au cardinal de la plus grande famille libre contenue dans la famille $\mathcal{F}$.

Exemple 12. *Déterminer le rang de la famille* $\mathcal{F} = (X^2 - 1, X + 1, X - 1)$.

Solution.

Exemple 13. *Déterminer le rang de la famille* $\mathcal{F} = (X^2 - 1, X + 1, X^2 + X)$.

Solution.

Propriété 1.16 : *Rang d'une famille*

Si $\mathcal{F}$ est une famille finie d'un espace vectoriel E, alors

(i) $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{card}(\mathcal{F}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F}$ est une famille libre.

(ii) $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim(E) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F}$ est une famille génératrice de E.

(iii) $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{card}(\mathcal{F}) = \dim(E) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F}$ est une base de E.

Démonstration. (i) D'après la proposition 1.11,

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{card}(\mathcal{F}) \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{F})) = \mathrm{card}(\mathcal{F}) \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ est une base de } \mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ est une famille libre.}$$

(ii) Comme $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de E, d'après la proposition 1.13,

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim(E) \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{F})) = \dim(E) \Leftrightarrow \mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = E \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ est une famille génératrice de } E.$$

(iii) C'est la combinaison de (i) et (ii).

□

Exemple 14. *Si* f_1 *et* f_2 *sont deux vecteurs non colinéaires, alors* $\mathrm{rg}(f_1, f_2) = 2$.

On a vu dans le chapitre Espaces vectoriels qu'une opération élémentaire sur la famille $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ ne change pas l'espace vectoriel engendré $\mathrm{Vect}(f_1, f_2, \ldots, f_p)$. On reprend la proposition vue dans le chapitre Espaces vectoriels :

Proposition 1.17 : *Règles de calcul*

Soit $(f_1, \ldots, f_p, f_{p+1})$ une famille de vecteurs de E.

(i) $\mathrm{rg}(f_1, \ldots, f_p) \leq \mathrm{rg}(f_1, \ldots, f_p, f_{p+1})$

(ii) Si f_{p+1} est une combinaison linéaire des p autres vecteurs, i.e. $f_{p+1} \in \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_p)$

$$\mathrm{rg}(f_1, \ldots, f_p) = \mathrm{rg}(f_1, \ldots, f_p, f_{p+1})$$

(iii) Si $\lambda \neq 0$, alors

$$\mathrm{rg}(f_1, \ldots, f_p) = \mathrm{rg}(f_1, \ldots, \lambda \cdot f_p)$$

(iv) Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{R}$, alors

$$\mathrm{rg}(f_1, \ldots, f_p) = \mathrm{rg}\left(f_1, \ldots, \lambda \cdot f_p + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k \cdot f_k\right)$$

(v) On peut également échanger deux vecteurs

$$\mathrm{rg}(f_1, \ldots, f_i, \ldots f_j \ldots, f_p) = \mathrm{rg}(f_1, \ldots, f_j, \ldots f_i \ldots, f_p)$$

Pour déterminer le rang de la famille $\mathcal{F}$, on détermine une base de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ en effectuant des opérations élémentaires sur la famille $\mathcal{F}$.

Exemple 15. *Déterminer le rang de la famille* $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\-1\\7\end{pmatrix}\right)$.

Solution.

2 Somme de deux sous-espaces vectoriels

2.1 Définition

Définition 2.1 : *Somme de deux sous-espaces vectoriels*

Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On appelle **somme** de F et G l'ensemble, noté $F+G$, défini par

$$F+G=\{x+y \text{ avec } x\in F \text{ et } y\in G\}.$$

On a toujours : $F+G=G+F$, $F+E=E$ et $F+\{0_E\}=F$.

Exemple 16. *Si* $F=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3, x_1+x_2-x_3=0\right\}$ *et* $G=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3, x_3=0\right\}$, *alors*

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\in F+G \quad \textit{car} \quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \textit{avec} \quad \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\in F \ \textit{et} \ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\in G.$$

Cependant on n'a pas l'unicité de l'écriture puisque

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \textit{avec} \quad \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\in F \ \textit{et} \ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\in G.$$

Théorème 2.2 : *Somme de deux sous-espaces vectoriels*

Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. À faire en exercice. □

$F+G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant F et G.

2.2 Somme directe

Définition 2.3 : *Somme directe de deux sous-espaces vectoriels*

Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont en **somme directe** si

$$F\cap G=\{0_E\}.$$

Lorsque la somme $F+G$ est directe, elle est notée $F\oplus G$.

Exemple 17. *Soient* $F=\mathrm{Vect}(1,X,X^2)=\mathbb{R}_2[X]$ *et* $G=\mathrm{Vect}(X^3)$. *On a*

$$F\cap G=\{0_{\mathbb{R}[X]}\} \ \textit{et} \ F+G=\mathbb{R}_3[X] \ \textit{donc} \ F\oplus G=\mathbb{R}_3[X].$$

Exemple 18. *Soient* $F=\mathrm{Vect}(1,X,X^2)=\mathbb{R}_2[X]$ *et* $G=\mathrm{Vect}(X^2,X^3)$. *On a* $F+G=\mathbb{R}_3[X]$, *mais* $F\cap G=\mathrm{Vect}(X^2)\neq\{0_{\mathbb{R}[X]}\}$. *Par conséquent,* F *et* G *ne sont pas en somme directe.*

Théorème 2.4 : *Caractérisation de la somme directe de deux sous-espaces vectoriels*

Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

$$F \text{ et } G \text{ sont en somme directe} \quad \Leftrightarrow \quad \forall z \in F+G,\ \exists!(x,y) \in F \times G,\ z = x+y.$$

En situation de somme directe, tout vecteur de $F+G$ se décompose de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Démonstration. $\Rightarrow$ On suppose que F et G sont en somme directe, donc $F \cap G = \{0_E\}$. Soit $z \in F+G$, on considère deux décompositions de z en somme de deux vecteurs de F et G :

$$z = x + y = x' + y'.$$

Alors $x - x' = y' - y$. Or $x - x' \in F$ et $y' - y \in G$, d'où $x - x' = y' - y = 0_E$ et on a bien unicité de la décomposition.
$\Leftarrow$ On suppose que la décomposition de chaque élément de $F+G$ est unique. On considère $z \in F \cap G$, on a alors

$$z = 0_E + z = z + 0_E$$

et, par unicité de la décomposition de z en somme de vecteurs de F et G, on obtient bien $z = 0_E$. D'où,

$$F \cap G = \{0_E\}.$$

□

Exemple 19. *Soient* $F = \text{Vect}\left(X^2+1, X\right)$ *et* $G = \text{Vect}\left(-X^2+2, X-1\right)$. *Montrer que* F *et* G *ne sont pas en somme directe.*

Solution.

2.3 Somme de sous-espaces vectoriels en dimension finie

Proposition 2.5 : *Concaténation de bases de sous-espaces vectoriels*

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E, de bases respectives $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ et $\mathcal{G} = (v_1, \dots, v_q)$. Alors la famille $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)$ est une famille génératrice de $F+G$

Démonstration. Si $z \in F+G$ alors il existe $x \in F$ et $y \in G$ tels que $z = x+y$. Comme $x \in F$ (resp. $y \in G$), il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ (resp. $\mu_1, \dots, \mu_q$) des réels tels que

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{j=1}^{q} \mu_j vj.$$

Ainsi

$$z = x + y = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j vj$$

donc $\mathcal{B}$ est génératrice de $F+G$. □

La famille $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)$ obtenue par juxtaposition des bases de F et de G n'est, en général, pas une base de $F+G$.

Exemple 20. *Soient* $F = \text{Vect}(1, X)$ *et* $G = \text{Vect}(X, X^2)$, *on a* $F + G = \text{Vect}(1, X, X^2) = \mathbb{R}_2[X]$.

Remarque 2.6 : *Concaténation de familles libres*

La concaténation de deux familles libres de F et de G ne donne pas forcément une famille libre de $F+G$. Il suffit par exemple de considérer le cas où ces deux familles ont un vecteur commun.

Théorème 2.7 : *Caractérisation de sommes directes par concaténation des bases*

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E, de bases respectives $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ et $\mathcal{G} = (v_1, \dots, v_q)$. On note $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)$.

$$F \oplus G = E \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{B} \text{ est une base de } E.$$

Démonstration. Montrons d'abord que $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)$ est une base de $F \oplus G$.

— D'après la proposition 2.5, $\mathcal{B}$ est génératrice de $F \oplus G$.

— Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j vj = 0_E$ alors comme F et G sont en somme directe

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = -\sum_{j=1}^{q} \mu_j vj \in F \cap G = \{0_E\}.$$

D'où $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = \mu_1 = \mu_q = 0$, car $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont libres. D'où $\mathcal{B}$ est libre.

Donc $\mathcal{B}$ est une base de $F \oplus G$. Montrons alors que

$$F \oplus G = E \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{B} \text{ est une base de } E.$$

$\Rightarrow$ On suppose que $F \oplus G = E$. Donc $\mathcal{B}$ est une base de $F \oplus G = E$.

$\Leftarrow$ On suppose que $\mathcal{B}$ est une base de E. Comme $\mathcal{B}$ est une base de $F \oplus G$, alors $\dim(F \oplus G) = \dim(E)$. D'après la proposition 1.13, comme $F \oplus G$ est un sous-espace vectoriel de E, alors $F \oplus G = E$. □

Exemple 21. *Soient* $F = \mathrm{Vect}(1, X)$ *et* $G = \mathrm{Vect}(X^2)$. *On a* $F \oplus G = \mathrm{Vect}(1, X, X^2) = \mathbb{R}_2[X]$.

Corollaire 2.8 : *Dimension d'une somme directe de deux sous-espaces vectoriels*

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E en somme directe. Alors

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G).$$

Démonstration. C'est une conséquence directe du théorème 2.7. □

Théorème 2.9 : *Formule de Grassmann*

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

La formule de Grassmann est le pendant, pour la dimension des sous-espaces vectoriels, de la formule du cardinal d'une union (formule du crible).

Démonstration. L'idée de la démonstration est la suivante : on considère une base de $F \cap G$. Avec le théorème 1.8 de la base incomplète, on complète cette base d'une part en une base de F, d'autre part en une base de G. On montre que lorsqu'on réunit tous ces vecteurs (en ne comptant qu'une fois ceux de $F \cap G$, d'où le « moins »), on obtient une base de $F + G$. □

Exemple 22. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que* $\dim(F) = 4$, $\dim(G) = 5$ *et* $\dim(E) = 7$. *Trouver les dimensions possibles de $F \cap G$.*

Solution.

Exemple 23. *Soient $E = \mathbb{R}^3$, P_1 et P_2 deux plans vectoriels distincts. Montrer que $P_1 + P_2 = \mathbb{R}^3$ et que $P_1 \cap P_2$ est une droite vectorielle.*

Solution.

2.4 Sous-espaces supplémentaires

Définition 2.10 : *Sous-espace supplémentaire*

Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont **supplémentaires dans** E si

$$F \oplus G = E.$$

Par les résultats précédents, deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = E$, ou encore, si et seulement si tout vecteur de E se décompose de manière unique comme somme de deux vecteurs de F et G.

Exemple 24. *Soit $F = \mathrm{Vect}(X)$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_2[X]$. Ce supplémentaire est-il unique ?*

Solution.

Théorème 2.11 : *Existence d'un supplémentaire en dimension finie*

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F possède un sous-espace supplémentaire dans E.

Ce supplémentaire est de dimension $\dim(E) - \dim(F)$.

Démonstration. Il suffit de considérer une base $\mathcal{F}$ de F que l'on complète en une base $\mathcal{B}$ de E. Les vecteurs ajoutés à $\mathcal{F}$ pour former $\mathcal{B}$ engendrent alors un supplémentaire de F dans E. $\square$

Proposition 2.12 : *Caractérisation du supplémentaire en dimension finie*

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E \Leftrightarrow \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F + G = E \\ \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{cases}$$

Démonstration. À faire en exercice en utilisant la formule de Grassmann. $\square$

D'après le théorème 2.7, deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires si et seulement si la concaténation de n'importe quelle base de F et de n'importe quelle base de G donne une base de E.

Exemple 25. *Soient $E = \mathbb{R}^3$ et P un plan vectoriel. Montrer que toute droite vectorielle qui n'est pas incluse dans P est un supplémentaire de P.*

Solution.

Annexe : Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, a et b deux réels. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **récurrente linéaire d'ordre 2 de paramètres** (a, b) si

$$(*) : \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n.$$

Lemme 2.13 : *Structure d'espace vectoriel pour les solutions de* $(*)$

L'ensemble E des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation $(*)$ est un espace vectoriel de dimension 2.

Démonstration. Il est simple de vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, espace vectoriel des suites réelles. Montrons que E est de dimension 2.

Considérons les deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la relation $(*)$ et $v_0 = 1$, $v_1 = 0$ pour $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $w_0 = 0$, $w_1 = 1$ pour $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Grâce au principe de récurrence, on vérifie que ces deux suites sont bien définies.

(i) La famille $((v_n), (w_n))$ est libre : soient λ, μ deux réels tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lambda v_n + \mu w_n = 0.$$

En utilisant cette relation pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient immédiatement $\lambda = \mu = 0$.

(ii) La famille $((v_n), (w_n))$ est génératrice de E : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; z_n = u_0\, v_n + u_1\, w_n.$$

On a $z_0 = u_0$ et $z_1 = u_1$. Par récurrence double, en utilisant la relation $(*)$ vérifiée à la fois par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; z_n = u_n.$$

Ce qui montre que tout élément de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La famille $((v_n), (w_n))$ est donc une base de E : E est un espace vectoriel de dimension 2. □

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 réelle de paramètres (a, b). Son **équation caractéristique** est définie comme étant l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(**) : \; x^2 - ax - b = 0.$$

Proposition 2.14 : *Suites récurrentes linéaires d'ordre 2*

(i) Si $(**)$ possède deux solutions réelles x_1 et x_2, alors $\exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda\, x_1^n + \mu\, x_2^n.$$

(ii) Si $(**)$ possède une unique solution réelle $x_0 = \dfrac{a}{2}$, alors $\exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda\, n + \mu)\; x_0^n.$$

Démonstration. D'après le lemme 2.13, l'ensemble E des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation $(*)$ est un espace vectoriel de dimension 2. Pour déterminer l'ensemble E, on cherche donc deux suites solutions formant une famille libre.

(i) Si $(**)$ possède deux solutions réelles x_1 et x_2, montrons que les deux suites $(x_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans E.

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N},\ x_1^{n+2} &= x_1^n\,x_1^2\\ &= x_1^n\,(a\,x_1+b)\ \text{ car } x_1 \text{ est solution de } (**),\\ &= a\,x_1^{n+1}+b\,x_1^n\end{aligned}$$

$(x_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation $(*)$ et est donc dans E. De même, $(x_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans E.
Montrons que $\left((x_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (x_2^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est une famille libre. Soient λ, μ deux réels tels que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \lambda x_1^n+\mu x_2^n=0.$$

En utilisant cette relation pour $n=0$ et $n=1$, on obtient immédiatement $\lambda=\mu=0$. Ainsi $\left((x_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (x_2^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est une famille libre de cardinal 2 de E et E est un espace vectoriel de dimension 2. Par conséquent, $\left((x_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (x_2^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est une base de E.

(ii) Si $(**)$ possède une unique solution réelle x_0, de même que précédemment on montre que $\left((x_0^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n\,x_0^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est une famille libre de E, espace vectoriel de dimension 2 et donc une base de E.
En effet, pour montrer que $(n\,x_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E on effectue

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N},\ (n+2)\,x_0^{n+2}-\Big(a\,(n+1)\,x_0^{n+1}+b\,n\,x_0^n\Big) &= n\,x_0^n\,\Big(x_0^2-ax_0-b\Big)+2x_0^{n+2}-ax_0^{n+1}\\ &= 2x_0^{n+2}-ax_0^{n+1}\ \text{ car } x_0 \text{ est solution de } (**),\\ &= 2x_0^{n+1}\,(2x_0-a)\\ &= 0\quad \text{car } x_0=\frac{a}{2}.\end{aligned}$$

□